

УДК 531.36

О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в случае резонанса четвертого порядка

Б. С. Бардин

Кафедра теоретической механики
Факультет прикладной математики и физики
Московский авиационный институт
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: bsbardin@yandex.ru

Получено 13 ноября 2006 г.

Рассматривается движение автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы вблизи ее положения равновесия. Предполагается, что в некоторой окрестности положения равновесия функция Гамильтона является аналитической и знакопеременной, а частоты линейных колебаний удовлетворяют отношению 3:1.

Проведен подробный анализ укороченной системы, отвечающей нормализованному гамильтониану, в котором отброшены члены выше четвертой степени. Показано, что укороченная система может быть проинтегрирована в эллиптических функциях Якоби, а ее решения описывают либо периодические движения, либо движения асимптотические к периодическим, либо условно-периодические движения. На основании методов теории КАМ установлено, что большинство условно-периодических движений сохраняются и в полной системе. Более того, в достаточно малой окрестности положения равновесия траектории полной системы, не являющиеся условно-периодическими, образуют множество экспоненциально малой меры. Результаты исследования применены в задаче о движении динамически симметричного спутника вблизи его цилиндрической прецессии.

Ключевые слова: гамильтонова система, периодические движения, нормальная форма, резонанс, переменные действие-угол, КАМ-теория.

B. S. Bardin

On nonlinear oscillations of Hamiltonian system in case of fourth order resonance

We deal with an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom. We assume that the Hamiltonian function is analytic in a neighborhood of the phase space origin which is an equilibrium point. We consider the case when two imaginary eigenvalues of the matrix of the linearized system are in the ratio 3:1.

We study nonlinear conditionally-periodic motions of the system in the vicinity of the equilibrium point. Omitting the terms of order higher than five in the normalized Hamiltonian we analyze the so-called truncated system in detail. We show that its general solution can be given in terms of elliptic integrals and elliptic functions. The motions of the truncated system are either periodic, or asymptotic to a periodic one, or conditionally-periodic. By using the KAM theory methods we show that the most of conditionally-periodic trajectories of the truncated system persist also in the full system. Moreover, the trajectories that became not conditionally-periodic in the full system belong to a subset of exponentially small measure.

The results of the study are applied for the analysis of nonlinear motions of a symmetric satellite in a neighborhood of its cylindric precession.

Keywords: Hamiltonian system, periodic orbits, normal form, resonance, action-angle variables, KAM theory.

Mathematical Subject Classifications: 34C15, 34C20, 34C23, 34C25

1. Постановка задачи

Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (1.1)$$

начало координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) фазового пространства которой является положением равновесия. Функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ предполагается аналитической и знакопеременной в некоторой окрестности начала координат. Будем считать, что собственные значения матрицы линеаризованной системы чисто мнимы $\pm i\lambda_j$ ($\lambda_j > 0, j = 1, 2$), а частоты λ_1, λ_2 линейных колебаний удовлетворяют соотношению $\lambda_1 = 3\lambda_2$, т.е. имеет место резонанс четвертого порядка.

При сделанных предположениях канонические переменные q_i, p_i можно ввести так, что гамильтониан системы запишется в следующей нормальной форме [1, 2]

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2} \lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + \\ & + \frac{1}{4} c_{20} (q_1^2 + p_1^2)^2 + \frac{1}{4} c_{11} (q_1^2 + p_1^2) (q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{4} c_{02} (q_2^2 + p_2^2)^2 + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{36} b [q_2^2 (q_1 q_2 - 3 p_2 p_1) + p_2^2 (p_2 p_1 - 3 q_1 q_2)] + O_6, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $b, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ — постоянные коэффициенты. Через O_6 обозначен ряд по степеням переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$), сходящийся в некоторой окрестности положения равновесия и начинающийся с членов не ниже шестой степени.

Далее предполагаем, что положение равновесия устойчиво по Ляпунову и, кроме того, выполнено условие $b \neq 0$. Это означает, что коэффициенты гамильтониана (1.2) удовлетворяют неравенствам [1, 2]

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > |b| > 0. \quad (1.3)$$

В присутствии резонансов структура фазового пространства в окрестности положения равновесия существенно отличается от общего нерезонансного случая. Вопрос о поведении траекторий системы вблизи положения равновесия при резонансах представляет немалый интерес и неоднократно рассматривался с различных точек зрения. В [2, 3, 4] была полностью решена задача об устойчивости системы (1.1) в случае резонанса четвертого порядка. В работах [5, 6, 7, 8, 9] исследовалась задача о существовании и орбитальной устойчивости в линейном приближении периодических решений системы (1.1), рождающихся из положения равновесия, при наличии резонанса. Движения укороченной системы, гамильтонианом которой является резонансная нормальная форма, содержащая члены не выше четвертой степени, рассматривались в [5, 10, 11, 12]. Фазовые портреты укороченной системы изучались в [1, 13]. В работе [14] был предложен геометрический подход для описания фазового потока канонической системы с двумя степенями свободы, гамильтонианом которой является резонансная нормальная форма.

В данной статье проводится нелинейный анализ условно-периодических движений системы (1.1) с гамильтонианом (1.2) в малой окрестности положения равновесия. Исследование выполняется при помощи методов локального анализа и КАМ теории. Подобная методика применялась ранее в работах [15, 16, 17, 18] для исследования нелинейных колебаний системы (1.1) при резонансах первого, второго и третьего порядков.

Введем новую независимую переменную $\tau = \lambda_2 t$ и выполним замену канонических переменных $q_j, p_j \rightarrow x_j, y_j$ по формулам

$$q_i = \sqrt{\frac{\varepsilon \sigma \lambda_2}{c}} x_i, \quad p_i = \sqrt{\frac{\varepsilon \sigma \lambda_2}{c}} y_i, \quad c = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}, \quad \sigma = \text{sign}(\lambda_2/c),$$

где ε малая величина.

В переменных x_j, y_j ($j = 1, 2$) гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} H = & \frac{3}{2} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2) + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon \sigma \left\{ a_{20} (x_1^2 + y_1^2)^2 + a_{11} (x_1^2 + y_1^2) (x_2^2 + y_2^2) + a_{02} (x_2^2 + y_2^2)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{9} \gamma [x_2^2 (x_1 x_2 - 3 y_2 y_1) + y_2^2 (y_2 y_1 - 3 x_1 x_2)] \right\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c} \quad (i + j = 2), \quad \gamma = \frac{b}{c}.$$

Из неравенства (1.3) следует $0 < |\gamma| < 1$. Кроме того, заметим, что коэффициенты a_{ij} удовлетворяют равенству $a_{20} + 3a_{11} + 9a_{02} = 1$.

2. Укороченная система

В данном параграфе исследуются движения укороченной системы с гамильтонианом

$$H_* = 3r_1 - r_2 + \varepsilon \sigma \left\{ a_{20} r_1^2 + a_{11} r_1 r_2 + a_{02} r_2^2 + \frac{\gamma}{3\sqrt{3}} r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(3\varphi_2 + \varphi_1) \right\}, \quad (2.1)$$

который получается из гамильтониана (1.4) полной системы, если в последнем пренебречь членами порядка выше ε и выполнить каноническую замену переменных

$$x_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad y_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i.$$

Кроме интеграла энергии $H_* = \text{const}$ укороченная система имеет еще один первый интеграл $3r_1 - r_2 = \text{const}$ и может быть проинтегрирована в квадратурах. Ниже будет показано, что ее общее решение можно получить явно через эллиптические функции и эллиптические интегралы.

Выполним еще одну каноническую замену переменных

$$\varphi_1 = \varphi_1, \quad \theta = \varphi_1 + 3\varphi_2, \quad J = r_1 - \frac{r_2}{3}, \quad R_2 = \frac{r_2}{3}. \quad (2.2)$$

Тогда гамильтониан укороченной системы примет вид

$$H_* = 3J + \varepsilon \sigma \{ a_{20} J^2 + \kappa J R_2 + R_2^2 + \gamma R_2 \sqrt{R_2(J + R_2)} \cos \theta \}, \quad (2.3)$$

где $\kappa = 2a_{20} + 3a_{11}$.

В новых переменных дополнительный первый интеграл запишется в виде $J = J_0 = \text{const}$. Эволюция переменных θ и R_2 описывается следующими уравнениями

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon \sigma \left\{ \kappa J_0 + 2R_2 + \gamma \frac{(4R_2 + 3J_0)\sqrt{R_2}}{2\sqrt{J_0 + R_2}} \cos \theta \right\}, \quad \frac{dR_2}{d\tau} = \varepsilon \sigma \gamma R_2 \sqrt{R_2(J_0 + R_2)} \sin \theta, \quad (2.4)$$

где J_0 играет роль параметра. Уравнения (2.4) представляют собой каноническую систему с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой имеет вид

$$F = \varepsilon \sigma \{ \varkappa J_0 R_2 + R_2^2 + \gamma R_2 \sqrt{(J_0 + R_2) R_2} \cos \theta \}. \quad (2.5)$$

Система (2.4) автономна, поэтому гамильтониан (2.5) является ее первым интегралом $F = \varepsilon \sigma h = \text{const}$.

Если $J_0 > 0$, то при любых значениях параметров \varkappa и γ система (2.4) имеет тривиальное положение равновесия $R_2 = 0$, которому соответствует семейство так называемых короткопериодических движений укороченной системы. Из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле следует, что короткопериодические движения сохраняются и в полной системе, а их период по переменной τ близок к $2\pi/3$. Положение равновесия $R_2 = 0$ существует также и при $J_0 = 0$. В этом случае оно соответствует положению равновесия полной системы (1.1).

Помимо тривиального положения равновесия система (2.4) имеет положения равновесия определяемые формулами

$$\theta = \frac{\pi}{2} [1 + \text{sign}(J_0 \gamma (\varkappa + 2x_*))], \quad R_2 = x_* J_0, \quad (2.6)$$

где x_* — действительный корень уравнения

$$(16\gamma^2 - 16)x^3 + (24\gamma^2 - 16\varkappa - 16)x^2 + (9\gamma^2 - 16\varkappa - 4\varkappa^2)x - 4\varkappa^2 = 0. \quad (2.7)$$

Из очевидного неравенства $-J \leq R_2$ следует, что корень x_* должен принадлежать одному из интервалов $(-\infty; -1]$ или $[0; \infty)$. Можно показать, что для всех значений параметров \varkappa и γ , за исключением лишь $\varkappa = 3/2$, действительные корни уравнения (2.7) удовлетворяют указанному условию. При $\varkappa = 3/2$ уравнение (2.7) имеет простой и двукратный действительные корни, причем двукратный корень ($x_* = -3/4$) не принадлежит указанным выше интервалам.

Уравнение (2.7) инвариантно относительно замены $\gamma \rightarrow -\gamma$. Поэтому без ограничения общности далее полагаем $0 < \gamma < 1$. Анализ уравнения (2.7) показывает, что при значениях параметров \varkappa и γ , удовлетворяющих равенству

$$-16\varkappa^4 + 96\varkappa^3 + 72\varkappa^2\gamma^2 - 192\varkappa^2 - 72\gamma^2\varkappa + 128\varkappa - 36\gamma^2 + 27\gamma^4 = 0,$$

уравнение (2.7) имеет кратный корень.

В плоскости параметров \varkappa, γ последнее равенство определяет две кривые β_1 и β_2 , разделяющие область $0 < \gamma < 1$ на три подобласти (см. рис. 1). В подобласти I уравнение (2.7) имеет три различных действительных корня (два положительных и один отрицательный), которые обозначим $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ ($x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)}$). На граничной кривой β_1 положительные корни совпадают, образуя двукратный положительный корень $x^{(2,3)}$, который исчезает при переходе в подобласть II. Корень $x^{(1)}$ существует при всех значениях параметров в области $0 < \gamma < 1$ и является единственным действительным корнем уравнения (2.7) в подобласти II. На граничной кривой β_2 уравнение (2.7) имеет двукратный отрицательный корень $x^{(2,3)}$, который распадается на два различных действительных корня $x^{(2)}, x^{(3)}$ при переходе в подобласть III. Таким образом, в подобласти III уравнение (2.7) имеет три различных отрицательных действительных корня ($x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)}$).

Заметим, что граничные кривые β_1 и β_2 можно задать в параметрической форме

$$\varkappa = \frac{2s(2s+3)}{8s^2+12s+3}, \quad \gamma^2 = \frac{64(s^3+3s^2+3s+1)s}{(8s^2+12s+3)^2}.$$

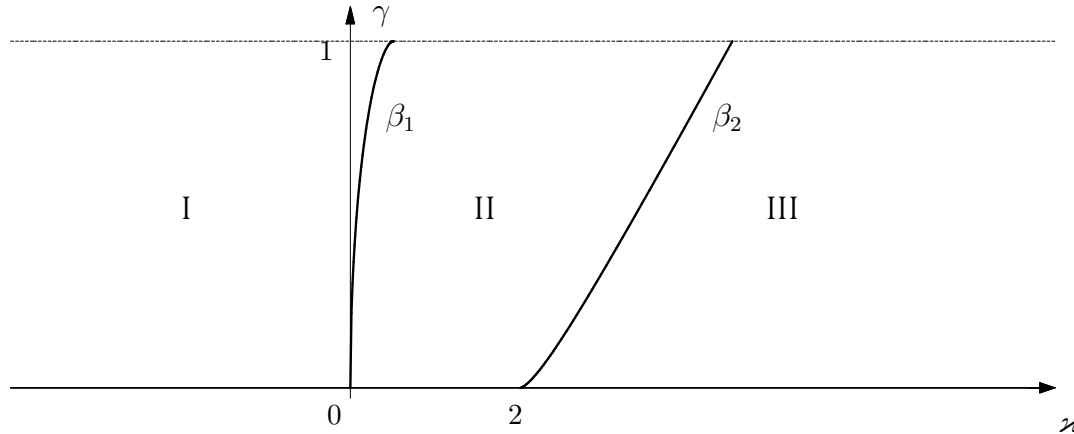


Рис. 1. В подобластях I и III существует три семейства долгопериодических движений; в подобласти II существует только одно семейство долгопериодических движений.

Параметр s принимает значения из интервалов $[0; +\infty)$ и $[-9/8; -1]$ на граничных кривых β_1 и β_2 соответственно. Фактически, параметр s представляет собой кратный корень уравнения (2.7).

Положения равновесия (2.6) соответствуют семействам долгопериодических движений укороченной системы, период которых по независимой переменной τ близок к 2π . Существование долгопериодических движений в полной системе было доказано в [6, 8, 9].

Структуру фазового пространства укороченной системы можно проанализировать на основании фазовых портретов, построенных для фиксированных значений J_0 и описывающих поведение траекторий редуцированной системы вида (2.4). Для заданных значений параметров κ и γ фазовые портреты качественно различаются только в трех следующих случаях: $J_0 > 0$, $J_0 = 0$ и $J_0 < 0$. При $J_0 \geq 0$ фазовые портреты удобно представлять в плоскости переменных $X_2 = \sqrt{2R_2} \cos \theta$, $Y_2 = \sqrt{2R_2} \sin \theta$. К сожалению, при $J_0 < 0$ фазовые портреты в плоскости указанных переменных содержат сингулярности. Этого можно избежать, если для $J_0 < 0$ строить фазовые портреты в плоскости переменных $X_1 = \sqrt{2R_1} \cos \theta$, $Y_1 = \sqrt{2R_1} \sin \theta$, где θ, R_1 принадлежат набору канонических переменных, определяемому формулами

$$\psi = -3\phi_2, \theta = \phi_1 + 3\phi_2, J = r_1 - \frac{1}{3}r_2, R_1 = r_1.$$

В переменных θ, R_1 гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$F = \varepsilon \sigma \{ J_0 (\kappa - 2) R_1 + R_1^2 + \gamma \sqrt{R_1 (R_1 - J_0)^3} \cos \theta \}.$$

Возможные виды фазовых портретов приведены на рис. 2. Точками P_1, P_2, P_3 изображены положения равновесия редуцированной системы (2.4), отвечающие корням $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ уравнения (2.7) соответственно.

Дадим некоторые комментарии к рис. 2. Для значений параметров κ и γ из подобласти I (см. рис. 1) фазовые портреты показаны на рис. 2а, 2б, 2с, 2е, 2ф. Причем, при $J_0 > 0$ фазовый портрет зависит от значений параметра κ и представлен на рис. 2а, 2б, 2с для качественно различных случаев $\kappa < 0$, $\kappa = 0$, $\kappa > 0$ соответственно. При $J_0 = 0$ и $J_0 < 0$ фазовые портреты показаны на рис. 2е и рис. 2ф. Для граничной кривой β_1 фазовые портреты изображены на рис. 2д, 2е, 2ф в случаях $J_0 > 0$, $J_0 = 0$, $J_0 < 0$ соответственно. В подобласти II фазовые портреты представлены на рис. 2е для $J_0 \geq 0$ и на рис. 2ф для $J_0 < 0$. Для граничной кривой β_2 фазовые портреты

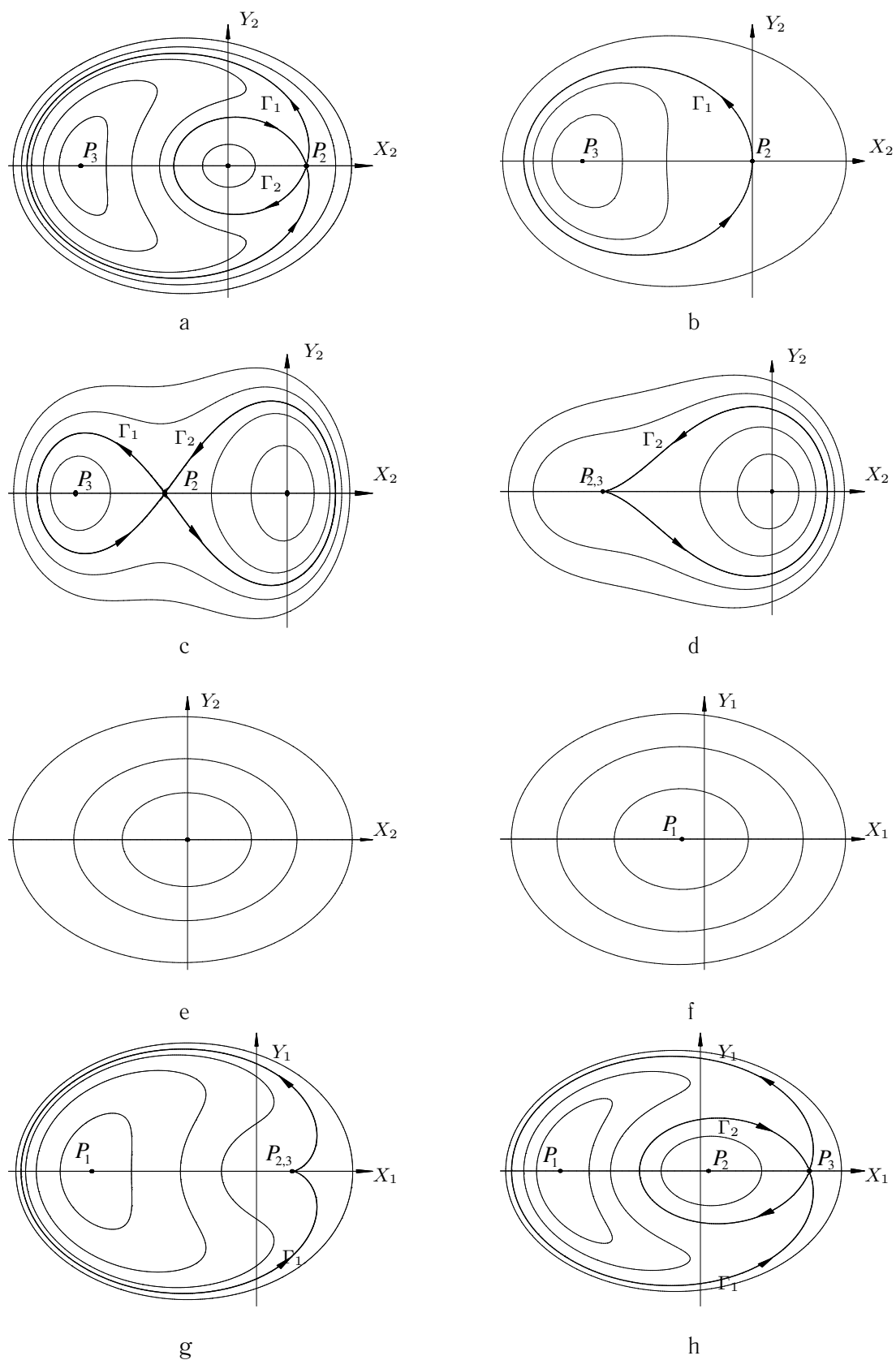


Рис. 2. Фазовые портреты укороченной системы: а) $J_0 > 0$, подобласть I, $\varkappa < 0$; б) $J_0 > 0$, подобласть I, $\varkappa = 0$; в) $J_0 > 0$, подобласть I, $\varkappa > 0$; д) $J_0 > 0$, границная кривая β_1 ; е) $J_0 > 0$, подобласти II или III; $J_0 = 0$; ф) $J_0 < 0$, подобласти I или II; г) $J_0 < 0$, границная кривая β_2 ; h) $J_0 < 0$, подобласть III.

изображены на рис. 2е при $J_0 \geq 0$, и на рис. 2г при $J_0 < 0$. В подобласти III фазовые портреты представлены на рис. 2е, 2h для $J_0 \geq 0$, $J_0 < 0$ соответственно.

Заметим, что изменения в фазовых портретах, происходящие при изменении параметров, тесно связаны с бифуркацией положений равновесия. Действительно, при $J_0 > 0$ и $\varkappa < 0$ существует два устойчивых положения равновесия (P_3 и начало координат) и одно неустойчивое положение равновесия P_2 (рис. 2а). С возрастанием параметра \varkappa , положения равновесия P_2 и P_3 приближаются к друг другу. При $\varkappa = 0$ положение равновесия P_2 совпадает с тривиальным положением равновесия (началом координат), которое становится неустойчивым. Это приводит к изменению структуры фазового портрета (см. рис. 2б). Как только параметр \varkappa принимает положительные значения, равновесие P_2 отделяется от начала координат, которое снова становится устойчивым (см. рис. 2с). Описанная бифуркация положений равновесия редуцированной системы (2.4) соответствует бифуркации короткопериодических и долгопериодических движений укороченной системы. Явление бифуркации приводит к неустойчивости короткопериодических движений при $\varkappa = 0$. Бифуркация подобного вида исследовалась ранее в [13]. Когда \varkappa принимает значения на граничной кривой β_1 , положения равновесия P_2 и P_3 сливаются, образуя неустойчивое равновесие $P_{2,3}$, которое исчезает при переходе в подобласть II. Данная бифуркация также приводит к изменению структуры фазовых портретов (ср. рис. 2е, рис. 2d и рис. 2е). Рассмотрим еще бифуркацию, равновесий при $J_0 < 0$. В этом случае редуцированная система всегда имеет устойчивое положение равновесия P_1 , которое является единственным положением равновесия в подобластях I и II (рис. 2f). На граничной кривой β_2 появляется еще одно положение равновесия $P_{2,3}$, которое является неустойчивым. При переходе в подобласть III происходит разветвление $P_{2,3}$ на устойчивое положение равновесия P_2 и неустойчивое положение равновесия P_3 . Изменения в фазовых портретах, соответствующие данной бифуркации показаны на рис. 2f, рис. 2g и рис. 2h.

Редуцированная система может быть проинтегрирована в эллиптических функциях Якоби. Вид ее общего решения существенно зависит от значений параметров \varkappa , γ и постоянных J_0 , h . Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Используя интеграл $F = \varepsilon \sigma h$ (см. формулу (2.5)), из второго уравнения системы (2.4) исключаем переменную θ и приходим к следующему уравнению для R_2

$$\frac{dR_2}{d\tau} = \mp \varepsilon \sigma \sqrt{\gamma^2 R_2^3 (R_2 + J_0) - (R_2^2 + \varkappa J_0 R_2 - h)^2}. \quad (2.8)$$

Верхний и нижний знаки в (2.8) соответствуют движению в полуплоскостях $Y_2 < 0$ и $Y_2 > 0$ (см. рис. 2), где переменная R_2 убывает и возрастает соответственно.

Если $J_0 = 0$, то движение редуцированной системы (2.4) возможно только при $h \geq 0$, причем на траекториях системы $\sqrt{h/(1+\gamma)} \leq R_2 \leq \sqrt{h/(1-\gamma)}$. Полагая $R_2(0) = \sqrt{h/(1+\gamma)}$, из уравнения (2.8) при $J_0 = 0$ имеем

$$R_2(\tau) = R_2(0) \frac{\gamma + (1 - \sqrt{1 - \gamma^2}) \operatorname{sn}^2(u, k_0)}{\gamma - (1 - \sqrt{1 - \gamma^2}) \operatorname{sn}^2(u, k_0)}, \quad (2.9)$$

где

$$k_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma}, \quad u = \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{h} (\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{1 - \gamma}) \tau.$$

Из (2.9) следует, что на траекториях редуцированной системы величина R_2 изменяется периодически с частотой

$$\omega = \varepsilon \sqrt{h} \omega_0, \quad (2.10)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\pi(\sqrt{1+\gamma} + \sqrt{1-\gamma})}{2K(k_0)},$$

а через $K(k_0)$ обозначен полный эллиптический интеграл первого рода.

Обозначим через $h^{(i)}$ значение константы h в положении равновесия (2.6), отвечающем действительному корню $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) уравнения (2.7). Из (2.4) и (2.5) имеем

$$h^{(i)} = \frac{J_0^2 x^{(i)} (2\kappa x^{(i)} + \kappa - x^{(i)})}{4x^{(i)} + 3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.11)$$

Пусть теперь $J_0 \neq 0$, тогда движение системы (2.4) возможно при $h \geq h_+$ в случае $J_0 > 0$ и при $h \geq h_-$ в случае $J_0 < 0$, где

$$h_+ = \begin{cases} h^{(3)}, & \text{if } \kappa < \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{2}, \\ 0, & \text{if } \kappa \geq \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$h_- = \begin{cases} h^{(1)}, & \text{if } \kappa > \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{2}, \\ 0, & \text{if } \kappa \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

При $J_0 \neq 0$ поведение фазовых траекторий и вид соответствующего решения системы (2.4) существенно зависит от корней следующего полинома

$$G(x) = \gamma^2 x^3 (x + 1) - (x^2 + \kappa x - c)^2, \quad (2.14)$$

где $c = h/J_0^2$.

Заметим сначала, что полином $G(x)$ имеет кратные корни только при $h = 0$ и $h = h^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$). Указанные значения постоянной h разделяют область возможного движения $h \geq h_+$ (или $h \geq h_-$) на несколько интервалов, в которых полином (2.14) имеет фиксированное число действительных корней. Это число может быть равно двум или четырем.

Пусть h принимает значения из интервала, где полином $G(x)$ имеет четыре действительных корня $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Положим сначала $R_2(0) = J_0 x_1$, тогда из уравнения (2.8) имеем

$$R_2(\tau) = J_0 \frac{x_1(x_4 - x_2) + x_4(x_2 - x_1)\text{sn}^2(u, k)}{x_4 - x_2 + (x_2 - x_1)\text{sn}^2(u, k)}, \quad (2.15)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}}, \quad u = \frac{1}{2} \varepsilon J_0 \sqrt{(1 - \gamma^2)(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)} \tau. \quad (2.16)$$

Движение, соответствующее решению (2.15), ограничено и удовлетворяет неравенству $J_0 x_1 \leq R_2 \leq J_0 x_2$, если J_0, x_1, x_2 положительны и неравенству $J_0 x_2 \leq R_2 \leq J_0 x_1$, если J_0, x_1, x_2 отрицательны.

Положим теперь $R_2(0) = J_0 x_4$, тогда из уравнения (2.8) получаем

$$R_2(\tau) = J_0 \frac{x_4(x_3 - x_1) + x_1(x_4 - x_3)\text{sn}^2(u, k)}{x_3 - x_1 - (x_4 - x_3)\text{sn}^2(u, k)}, \quad (2.17)$$

где k и u определяются формулами (2.16). На движении, отвечающем решению (2.17), выполняется неравенство $J_0 x_3 \leq R_2 \leq J_0 x_4$, если J_0, x_3, x_4 положительны и неравенство $J_0 x_4 \leq R_2 \leq J_0 x_3$, если J_0, x_3, x_4 отрицательны.

Заметим, что решения (2.15) и (2.17) описывают изменение переменной R_2 на двух различных траекториях редуцированной системы, которые соответствуют одному и тому же значению h .

При $k \neq 1$ оба решения (2.15) и (2.17) описывают периодические движения с частотой

$$\omega = \frac{\pi \varepsilon J_0 \sqrt{(1 - \gamma^2)(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}}{2K(k)}. \quad (2.18)$$

Отметим еще, что при $h \gg J_0^2$ уравнение (2.14) всегда имеет четыре действительных корня. В этом случае для формулы (2.18) имеет место следующее асимптотическое разложение

$$\omega = \frac{\pi \varepsilon \sqrt{h}(\sqrt{1 + \gamma} + \sqrt{1 - \gamma})}{2K(k_0)} + O\left(\frac{J_0}{\sqrt{h}}\right). \quad (2.19)$$

Как и следовало ожидать, главная часть разложения (2.19) совпадает с (2.10).

Пусть теперь h принадлежит интервалу значений, для которых полином $G(x)$ имеет два действительных корня $x_1 < x_2$ и два комплексных корня $x_3 = y - iz$, $x_4 = y + iz$. В этом случае, полагая $R_2(0) = J_0 x_1$, имеем следующее решение уравнения (2.8)

$$R_2(\tau) = J_0 \frac{x_1 P + x_2 Q + (x_1 P - x_2 Q) \operatorname{cn}(u, k)}{P + Q + (P - Q) \operatorname{cn}(u, k)}, \quad (2.20)$$

где

$$Q = \sqrt{(y - x_1)^2 + z^2}, \quad P = \sqrt{(y - x_2)^2 + z^2}, \\ k = \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 - (P - Q)^2}{4QP}}, \quad u = \varepsilon J_0 \sqrt{(1 - \gamma^2)QP} \tau. \quad (2.21)$$

При $k \neq 1$ решение (2.20) является периодическим. Частота соответствующих колебаний вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\pi \varepsilon J_0 \sqrt{(1 - \gamma^2)QP}}{2K(k)}. \quad (2.22)$$

Предельные случаи $k = 0$ и $k = 1$ возможны только при $h = 0$ и $h = h^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) соответственно. В этих случаях формулы (2.15), (2.17), (2.20) также применимы. При $k = 1$ решение не является периодическим и описывает асимптотические движения на гомоклиниках Γ_1 или Γ_2 (см. рис. 2.).

Используя формулы (2.15), (2.17), (2.20) и первый интеграл $F = \varepsilon \sigma h$, можно получить явное выражение θ как функции τ и завершить интегрирование системы (2.4). Когда решение редуцированной системы получено, интегрирование укороченной системы с гамильтонианом (2.1) сводится к вычислению квадратуры.

Таким образом, в зависимости от начальных условий решения укороченной системы описывают либо периодические движения, либо движения асимптотические к периодическим, либо условно-периодические движения с частотами $\Omega = 3 + O(\varepsilon)$ и ω , где ω задается формулами (2.18) или (2.22). Периодические движения реализуются на замкнутых траекториях (периодических орбитах) фазового пространства укороченной системы. Траектории асимптотические к неустойчивым периодическим орбитам образуют инвариантные многообразия, разделяющие фазовое пространство укороченной системы на области условно-периодического движения.

3. О движениях полной системы

В этом параграфе мы покажем, что многие свойства движений укороченной системы сохраняются и в малой окрестности положения равновесия полной системы. В частности, будет доказано сохранение большинства условно-периодических движений.

В областях условно-периодического движения (вне асимптотических многообразий) фазового пространства укороченной системы можно ввести переменные действие-угол I_i, w_i ($i = 1, 2$). Фактически, импульс J уже является переменной действие, поскольку гамильтониан (2.3) укороченной системы явно не зависит от соответствующей координаты ψ_1 . Поэтому положим $I_1 = J$. Вторую переменную действие I_2 введем по формуле (см., например, [19])

$$I_2(h, I_1) = \frac{1}{2\pi} \oint R_2 d\theta. \quad (3.1)$$

Интеграл в (3.1) вычисляется вдоль замкнутой кривой $F = \varepsilon \sigma h$ фазовой плоскости редуцированной системы. Пусть $R_2^{(1)}$ и $R_2^{(2)}$ — максимальное и минимальное значения переменной R_2 на данной кривой. Учитывая, что переменная R_2 принимает свои экстремальные значения $R_2^{(1)}$ и $R_2^{(2)}$ при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, а также, используя уравнения (2.4) и первый интеграл $F = \varepsilon \sigma h$, равенство (3.1) можно переписать в следующем виде

$$I_2(h, I_1) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{R_2^{(1)}}^{R_2^{(2)}} \frac{2R_2(\kappa J + 2R_2)(J + R_2) + (4R_2 + 3J)(h - \kappa J R_2 - R_2^2)}{(J + R_2)\sqrt{\gamma^2 R_2^3(J + R_2) - (h - \kappa J R_2 - R_2^2)^2}} dR_2. \quad (3.2)$$

Обращение (3.2) дает $h = h(I_1, I_2)$ и позволяет получить гамильтониан F редуцированной системы в переменных I_1, I_2

$$F(\theta, R_2) = \varepsilon \sigma h(I_1, I_2). \quad (3.3)$$

Тогда каноническое преобразование $\psi_1, \theta, J, R_2 \rightarrow w_1, w_2, I_1, I_2$ можно задать следующей производящей функцией (см. [18])

$$S(I_1, I_2, \psi_1, \theta) = I_1 \psi_1 + \int_0^\theta R_2 d\theta, \quad (3.4)$$

где $R_2 = R_2(I_1, I_2, \theta)$ — функция определяемая соотношением (3.3).

В переменных действие-угол гамильтониан укороченной системы принимает вид

$$H_* = H^{(0)}(I_1) + \varepsilon H^{(1)}(I_1, I_2), \quad (3.5)$$

где $H^{(0)}(I_1) = 3I_1$ и $H^{(1)}(I_1, I_2) = \sigma(h(I_1, I_2) + a_{20}I_1^2)$.

Рассмотрим движение в полной системе. В переменных I_i, w_i ($i = 1, 2$) гамильтониан (1.4) имеет вид

$$H = H^{(0)}(I_1) + \varepsilon H^{(1)}(I_1, I_2) + \varepsilon^2 H^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2, \varepsilon^{1/2}). \quad (3.6)$$

Функция (3.6) аналитически зависит от всех своих аргументов и 2π -периодически зависит от w_1 и w_2 .

Поскольку при $\varepsilon = 0$ гамильтониан (3.6) зависит только от одной переменной I_1 , то имеет место случай собственного вырождения [20]. В [20, 21] было показано, что если на движениях укороченной системы выполняются неравенства

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0, \quad (3.7)$$

то для большинства начальных условий движения полной системы являются условно-периодическими. Кроме того, при всех начальных условиях переменные действие остаются бесконечно долго вблизи своих начальных значений [20] так, что имеет место следующая оценка [21]

$$|I_i(t) - I_i(0)| < d_1 \varepsilon, \quad (d_1 = \text{const}). \quad (3.8)$$

В фазовом пространстве полной системы траектории, которые не являются условно-периодическими, принадлежат множеству экспоненциально малой меры порядка $O(\exp(-d_2/\varepsilon))$, где $d_2 = \text{const} > 0$.

Проверим выполнимость неравенств (3.7). Первое и второе из них означают, что частоты

$$\Omega = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_1} + O(\varepsilon), \quad \omega = \varepsilon \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \quad (3.9)$$

условно-периодических движений укороченной системы не равны нулю. Первое неравенство (3.7) очевидно выполнено. Из формул (2.10), (2.18), (2.22) следует, что $\omega = 0$ при $k = 1$ либо при $J_0 = h = 0$. Случай $k = 1$ имеет место на асимптотических траекториях укороченной системы, случай $J_0 = h = 0$ соответствует положению равновесия укороченной системы. Таким образом, на условно-периодических движениях укороченной системы второе из неравенств (3.7) также выполняется.

Третье неравенство (3.7) требует подробного анализа. Сначала рассмотрим особые случаи. Пусть $I_1 = 0$, тогда выражение $h(0, I_2)$ можно получить в явном виде. Действительно, из (3.9) и (2.10) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial I_2}(0, I_2) = \sigma \sqrt{h} \omega_0. \quad (3.10)$$

Решая уравнение (3.10) с начальным условием $h(0, 0) = 0$, получаем

$$h(0, I_2) = \frac{1}{4} \omega_0^2 I_2^2. \quad (3.11)$$

Поэтому в случае $I_1 = 0$ третье неравенство (3.7) выполняется при всех значениях I_2 .

Пусть теперь $I_1 \neq 0$, но $I_1^2 \ll h$. Тогда, используя (3.9) и (2.19), получаем следующее уравнение для $h(I_1, I_2)$

$$\frac{\partial h}{\partial I_2}(I_1, I_2) = \sigma \sqrt{h} \omega_0 + O\left(\frac{I_1}{\sqrt{h}}\right). \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) имеем следующее асимптотическое разложение

$$h(I_1, I_2) = \frac{1}{4} \omega_0^2 I_2^2 + O\left(\frac{I_1}{I_2}\right), \quad (3.13)$$

которое сходится при $|I_1/I_2| < \mu$, где μ — достаточно малая величина. Поэтому третье неравенство (3.7) также выполнено и при $|I_1| < \mu |I_2|$ (т.е. при $|I_1| \ll |I_2|$).

Чтобы проверить третье неравенство (3.7) при $I_1 \neq 0$ и произвольных I_2 , воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon^2} \frac{d\omega^2}{dh}. \quad (3.14)$$

Принимая во внимание формулы (2.18) и (2.22), а также, используя соотношения для полных эллиптических интегралов первого и второго рода, соотношение (3.14) можно получить в явном виде. Опуская громоздкие преобразования, выпишем окончательный результат.

В зависимости от корней уравнения (2.14) возможны два случая. Если уравнение (2.14) имеет четыре действительных корня x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то при $I_1 \neq 0$

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{\pi^2 I_1^2 (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)}{4k^2 K^3(k)}, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(x_4 - x_3) ((x_4 - x_2) E(k) - K(k) (x_4 - x_1)) (\varkappa x_1 + x_1^2 - c)}{(x_2 - x_1) (x_4 - x_1)^2 (x_3 - x_1)}, \\ A_2 &= \frac{(x_4 - x_3) ((x_3 - x_1) E(k) - K(k) (x_3 - x_2)) (\varkappa x_2 + x_2^2 - c)}{(x_2 - x_1) (x_3 - x_2)^2 (x_4 - x_2)}, \\ A_3 &= \frac{(x_2 - x_1) ((x_4 - x_2) E(k) - K(k) (x_3 - x_2)) (\varkappa x_3 + x_3^2 - c)}{(x_4 - x_3) (x_3 - x_2)^2 (x_3 - x_1)}, \\ A_4 &= \frac{(x_2 - x_1) ((x_3 - x_1) E(k) - K(k) (x_4 - x_1)) (\varkappa x_4 + x_4^2 - c)}{(x_4 - x_3) (x_4 - x_1)^2 (x_4 - x_2)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Если уравнение (2.14) имеет два действительных корня x_1, x_2 и два комплексных корня $x_3 = y - iz, x_4 = y + iz$, то при $I_1 \neq 0$

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{\pi^2 I_1^2 (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)}{64P^2 Q^2 k^2 (1 - k^2) K^3(k)}, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(x_3 - x_4)^2 (PQ K(k) + (x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(K(k) - 2E(k))) (\varkappa x_1 + x_1^2 - c)}{(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)}, \\ B_2 &= \frac{(x_3 - x_4)^2 (PQ K(k) + (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(K(k) - 2E(k))) (\varkappa x_2 + x_2^2 - c)}{(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)}, \\ B_3 &= \frac{(x_1 - x_2)^2 (PQ K(k) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(K(k) - 2E(k))) (\varkappa x_3 + x_3^2 - c)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}, \\ B_4 &= \frac{(x_1 - x_2)^2 (PQ K(k) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(K(k) - 2E(k))) (\varkappa x_4 + x_4^2 - c)}{(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Величины P, Q, c определяются по формулам параграфа 2. $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. В (3.15) и (3.16) величина k вычисляется по формуле (2.16), а в (3.17) и (3.18) — по формуле (2.21).

Заметим, что в силу комплексной сопряженности корней x_3 и x_4 выражения B_1, B_2 являются действительными, а выражения B_3, B_4 — комплексно сопряженными. Поэтому (3.17) принимает только действительные значения.

Выражения (3.15) и (3.17) зависят от параметров \varkappa, γ и постоянной c . На основании формул (3.15)–(3.18) третье неравенство (3.7) было проверено численно для произвольных значений

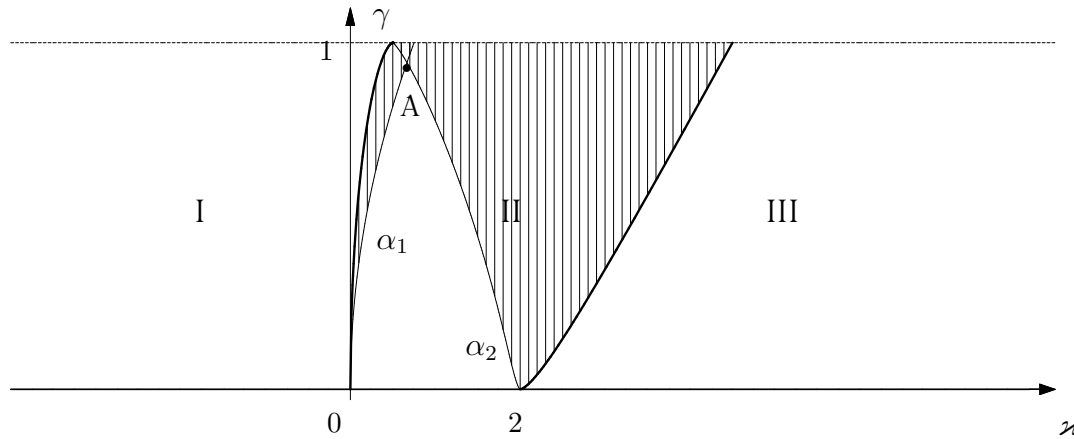


Рис. 3. В заштрихованной части подобласти II существует значение постоянной c , при котором третье неравенство (3.7) не выполняется.

κ , γ и c . Результат проведенных вычислений представлен в плоскости параметров κ , γ на рис. 3. В подобластях I и III, а также в незаштрихованной части подобласти II, третье неравенство (3.7) выполняется для всех значений c . Если же параметры κ и γ принимают значения в заштрихованной части подобласти II, то существует единственное значение постоянной $c = c_*$, при котором указанное неравенство не выполняется.

Граничная кривая, разделяющая подобласть II на две упомянутые части, состоит из двух участков. На рис. 3 они обозначены α_1 и α_2 . Численные расчеты показали, что $c_* = 0$ на участке α_1 и $c_* = c^{(1)}$ на участке α_2 (где $c^{(1)} = h^{(1)}/J_0^2$). Это означает, что на α_1 и α_2 третье неравенство (3.7) не выполнено для короткопериодических и долгопериодических движений соответственно. Данное обстоятельство позволяет получить аналитические выражения, задающие α_1 и α_2 . Действительно, используя (3.17)–(3.18), разложим $\partial^2 H^{(1)}/\partial I_2^2$ в ряд по степеням c

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = \frac{4\kappa - 3\gamma^2}{2\kappa} + \frac{3(3\gamma^2 + 4\kappa^2 - 8\kappa)\gamma^2}{2\kappa^4} c + O(c^2). \quad (3.19)$$

При $c = 0$ правая часть (3.19) может обратиться в ноль только при условии $\kappa = 3\gamma^2/4$. С другой стороны, на основании численных расчетов было установлено, что $c = 0$ на кривой α_1 . Это дает основание полагать, что соотношение $\kappa = 3\gamma^2/4$ определяет кривую α_1 . Покажем это более строго. При $0 < |c| \ll 1$ уравнение

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} = 0 \quad (3.20)$$

имеет единственное решение относительно κ , которое можно представить в виде

$$\kappa_* = \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{4(4 - 3\gamma^2)}{4\gamma^2} c + O(c^2). \quad (3.21)$$

Заметим теперь, что при $0 < \kappa \leq 2/3$ кривая $\kappa = 3\gamma^2/4$ лежит в области $\kappa \leq (1 + \sqrt{1 - \gamma^2})/2$, где, как следует из (2.13), должно выполняться неравенство $c \geq 0$. Если в окрестности кривой $\kappa = 3\gamma^2/4$ выполнено условие $\kappa > 3\gamma^2/4$, то на основании (3.21) при некотором малом $c > 0$ равенство (3.20) выполняется. Если же $\kappa < 3\gamma^2/4$, то не существует значений $c > 0$, удовлетворяющих равенству (3.20). Это и означает, что при $0 < \kappa \leq 2/3$ уравнение $\kappa = 3\gamma^2/4$ действительно задает граничную кривую α_1 .

Аналогично, анализируя разложение $\partial^2 H^{(1)} / \partial I_2^2$ в ряд по степеням $(c - c^{(1)})$, можно получить следующее уравнение, задающее кривую α_2

$$32(2\kappa - 1)^2 x_*^6 + 6(2\kappa + 19)(2\kappa - 1)^2 x_*^5 + 6(7\kappa + 26)(2\kappa - 1)^2 x_*^4 + \\ + 6(2\kappa - 1)(19\kappa^2 + 22\kappa - 13)x_*^3 + 6\kappa(23\kappa^2 - 6\kappa - 3)x_*^2 + \\ + 3\kappa^2(11\kappa - 3)x_* + 3\kappa^3 = 0. \quad (3.22)$$

В (3.22) параметр κ принимает значения из интервала $2/3 \leq \kappa < 2$. Через x_* обозначен единственный действительный корень уравнения (2.7). Легко проверить, что кривые α_1 и α_2 совпадают в точке $A(2/3; 2\sqrt{2}/3)$.

Поскольку условия (3.7) не выполняются лишь на некоторых условно-периодических траекториях укороченной системы, составляющих множество нулевой меры, то в малой окрестности (порядка ε) положения равновесия большинство траекторий полной системы являются условно-периодическими. Таким образом, несмотря на существование неустойчивых периодических орбит, движение в ε -окрестности положения равновесия является ограниченным. Это означает, что неустойчивость носит локальный характер, т. е. траектории, начинающиеся вблизи неустойчивой периодической орбиты, остаются в некоторой ее ограниченной окрестности сколь угодно долго.

4. О движениях спутника вблизи его регулярной прецессии

Рассмотрим движение спутника относительно центра масс. Спутник представляет собой динамически симметричное твердое тело, центр масс O которого движется по круговой орбите. Пусть $Oxyz$ — связанная система координат, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника (ось Oz совпадает с осью динамической симметрии). Оси орбитальной системы координат $OXYZ$ направим вдоль радиуса-вектора центра масс (OZ), трансверсали (OX) и бинормали к орбите (OY). Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной системы зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Уравнения движения спутника относительно центра масс можно записать в канонической форме с гамильтонианом [12]

$$H = \frac{p_\psi^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - p_\psi \operatorname{ctg} \theta \cos \psi - \alpha \beta p_\psi \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - p_\theta \sin \psi + \alpha \beta \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + \\ + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{3}{2}(\alpha - 1) \cos^2 \theta. \quad (4.1)$$

Через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ обозначены безразмерные импульсы, соответствующие координатам ψ, θ, φ . Угол φ является циклической координатой, поэтому в (4.1) полагаем $p_\varphi = \alpha\beta = \text{const}$, где $\alpha = C/A$ и $\beta = \Omega_0/\omega_0$; $A, B, C (A = B)$ — главные центральные моменты инерции; ω_0 и Ω_0 — среднее движение центра масс по орбите и проекция угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии соответственно. Параметр α принимает значения из интервала $[0; 2]$, а параметр β может быть любым действительным числом.

Каноническая система с гамильтонианом (4.1) имеет частное решение [22]

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0, \quad (4.2)$$

которое описывает цилиндрическую прецессию, представляющую собой стационарное вращение спутника относительно оси его динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты. Задача об устойчивости цилиндрической прецессии была подробно исследована в [12, 22, 23, 4]. Результаты этого исследования приведены на рис. 4. Штриховкой

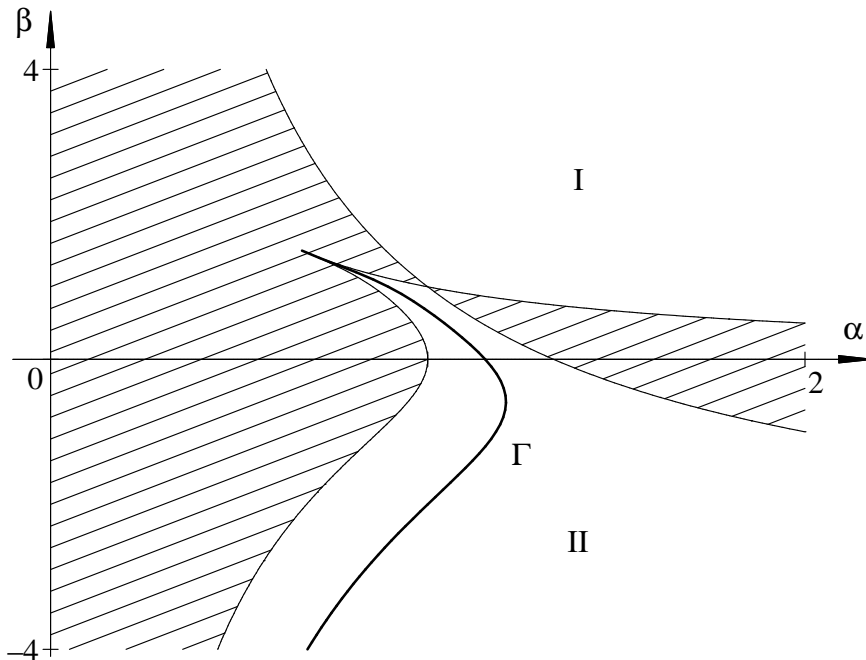


Рис. 4. Диаграмма устойчивости цилиндрической прецессии. Рисунок взят из [12].

показана область неустойчивости. В области I квадратичная часть гамильтониана уравнений возмущенного движения положительно определена и имеет место устойчивость по Ляпунову. В области II квадратичная часть гамильтониана уравнений возмущенного движения знакопеременна. Нелинейный анализ устойчивости, проведенный в [3, 4], показал, что на кривой Γ , отвечающей резонансу четвертого порядка, имеются два участка неустойчивости цилиндрической прецессии. Эти участки отвечают значениям параметра β из интервалов $[0.384642; 0.449337]$ и $(-1.742396; -1.566742]$. Во всех других точках области II цилиндрическая прецессия устойчива. Заметим, что на кривой Γ параметр β принимает значения из интервала $(-\infty; 3/2)$, причем точки кривой однозначно определяются значением β .

На основании результатов, полученных в параграфах 2 и 3, можно провести нелинейный анализ движений спутника в окрестности его цилиндрической прецессии для значений параметров принадлежащих резонансной кривой Γ , за исключением участков $\beta \in [0.384642; 0.449337]$ и $\beta \in [-1.742396; -1.566742]$. Расчеты показывают, что при $\beta \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1.926664) \cup (-1.314341; 0.384642) \cup (2/3; 3/2)$ существует только одно семейство долгопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника. При этом условно-периодические движения в окрестности цилиндрической прецессии описываются фазовыми портретами, изображенными на рис. 2е и рис. 2f. Если $\beta \in (-1.566742; -1.314341) \cup (0.449337; 2/3)$, то существует три семейства долгопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника, а условно-периодические движения в окрестности цилиндрической прецессии описываются фазовыми портретами, изображенными на рис. 2а и рис. 2f.

При $\beta \in (-1.926664; -1.742396)$ также существует три семейства долгопериодических движений, но поведение условно-периодических траекторий вблизи цилиндрической прецессии соответствует фазовым портретам, показанным на рис. 2е и рис. 2h. Заметим, что одно из трех семейств долгопериодических движений является неустойчивым. Однако эта неустойчивость является локальной, т. е. движения, начинающиеся вблизи неустойчивой периодической орбиты, остаются бесконечно долго в некоторой ее ограниченной окрестности. Если $\beta = -1.314341$ или $\beta = -1.926664$, то имеет место бифуркация короткопериодических и долгопериодических движений. В этом случае условно-периодические движения в окрестности цилиндрической прецессии описываются фазовыми портретами, изображенными на рис. 2е и рис. 2g.

В точках резонансной кривой $\beta = 2/3$ или $\beta = -2$ полученные выше результаты неприменимы, так как коэффициент b нормальной формы (1.2) обращается в ноль (резонансная часть исчезает). В указанных точках имеет место особый случай $\alpha = 1$, когда спутник является сферически симметричным и уравнения движения могут быть проинтегрированы явно.

5. Выводы

В случае резонанса четвертого порядка фазовое пространство в окрестности устойчивого положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы имеет довольно сложную структуру. Как было показано в параграфе 3, большинство траекторий в указанной окрестности являются условно-периодическими. Движение по таким траекториям можно приближено описать решением укороченной системы, которое получено в параграфе 2. Траектории, не являющиеся условно-периодическими принадлежат множеству экспоненциально малой меры.

Рассмотренная гамильтонова система имеет семейства периодических движений, рождающихся из положения равновесия. В зависимости от значений параметров системы существует либо одно семейство долгопериодических движений, либо три таких семейства. Причем в последнем случае движения одного из семейств являются орбитально неустойчивыми. Данная неустойчивость является локальной, т. е. движения, начинающиеся вблизи неустойчивой периодической орбиты, остаются бесконечно долго в некоторой ее ограниченной окрестности. В укороченной системе имеет место бифуркация долгопериодических движений. Для получения строгих выводов о бифуркации указанных движений в полной системе, необходимо проводить анализ до членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана в окрестности положения равновесия.

Результаты данной статьи могут быть применены для изучения качественного характера движения в задачах классической и небесной механики. В параграфе 4 указанные результаты использованы для исследования движения динамически симметричного спутника вблизи его цилиндрической прецессии в случае резонанса четвертого порядка.

Благодарности

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность профессору А.П. Маркееву (Институт проблем механики, РАН), который привлек его внимание к данной проблеме. Автор также очень благодарен профессору Себастьяну Вальчеру (Sebastian Walcher) за полезные обсуждения результатов и гостеприимство, оказанное в Техническом университете г. Аахен, Германия. Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Германской службы академических обменов

(DAAD), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00386) и Министерства образования и науки Испании (проект № МТМ2005-08595).

Список литературы

- [1] Арнольд, В.И., Козлов, В.В., Нейштадт, А.И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [2] Маркеев, А.П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*, М.:Наука, 1978.
- [3] Маркеев, А.П., Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса, *ПММ*, 1968, т. 32, вып. 4, с. 738–744.
- [4] Маркеев А.П., Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае, *ПММ*, 2000, т. 64, вып. 5, с. 833–847.
- [5] Henrard, J., Periodic Orbits Emanating from Resonant Equilibrium, *Celestial Mech.*, 1970, vol. 1, pp. 437–466.
- [6] Henrard, J., Lyapunov's Center Theorem for Resonant Equilibrium, *J. Differential Equations*, 1973, vol. 14, pp. 431–441.
- [7] Meyer, K.R. and Palmore, J.I., A New Class of Periodic Solutions in the Restricted Three Body Problem, *J. Differential Equations*, 1970, vol. 8, pp. 264–276.
- [8] Roels, J., Families of Periodic Solutions Near a Hamiltonian Equilibrium when the Ratio of Two Eigenvalues is 3, *J. Differential Equations*, 1971, vol. 10, pp. 431–447.
- [9] Schmidt, D.S., Periodic Solutions Near a Resonant equilibrium of a Hamiltonian System, *Celestial Mech.*, 1974, vol. 9, pp. 81–103.
- [10] Beth, H., The Oscillations about a Position of Equilibrium where a Simple Linear Relation Exists between the Frequencies of the Principal Vibrations, *Phil. Mag.*, 1913, vol. 26, pp. 268–324.
- [11] Korteweg, D. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté // Archives Néerlandaises des Sci. Exactes et de Nature, 1897, vol. 1, series 2, pp. 229–260.
- [12] Маркеев, А.П., Резонансные эффекты и устойчивость стационарных движений спутника, *Космич. исслед.*, 1967, т. 5, N. 3, с. 365–375.
- [13] Duistermaat, J., Bifurcation of Periodic Solutions Near Equilibrium Points of Hamiltonian Systems, *Lect. Notes in Math.*, 1983, V. No. 1057, P. 57–105.
- [14] Elipe, A., Complete Reduction of Oscillators in Resonance $p : q$, *Phys. Rev. L*, 2000, vol. 61, pp. 6477–6484.
- [15] Bardin, B.S., On Motions Near the Lagrange Equilibrium Point l_4 in the Case of Routh's Critical Mass Ratio, *Celest. Mech.*, 2002, vol. 82, pp. 163–177.
- [16] Маркеев, А.П., Об устойчивости и нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в одном резонансном случае, *Изв. РАН. МТТ*, 1998, N. 4, с. 38–49.
- [17] Маркеев, А.П., О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, *ПММ*, 1998, т. 62, N. 3, с. 372–382.
- [18] Маркеев, А.П., О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе $2 : 1$, *ПММ*, 1999, т. 63, N. 5, с. 757–769.
- [19] Арнольд, В.И., *Математические методы классической механики*. М: Эдиториал УРСС, 2000.

- [20] Арнольд, В.И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, *Успехи мат. наук*, 1963, т. 18, Вып. 6, с. 91–192.
- [21] Нейштадт, А.И., Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений, *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1016–1025.
- [22] Белецкий, В.В., *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*, М.: МГУ, 1975.
- [23] Сокольский, А.Г., К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника, *Космич. исслед.*, 1980, т. 18, вып. 5, с. 698–706.